Donc f est continue en $x_0 = 0$.

● / $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2-\sqrt{x^2-x}-2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-(x^2-x)}{x\times\sqrt{x^2-x}} = \lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{x(x-1)}{x\sqrt{x^2-x}} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$\Rightarrow f$ non dérivable à gauche en 0

Interprétation graphique : (C_f) admet une demi- tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse 0

*/ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{1+x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(1-(1+x^2))}{x\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})} = 0$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

Conclusion: f n'est pas dérivable en 0

Interprétation graphique : (C_f) admet une demi- tangente horizontale à droite au point d'abscisse 0

● Pour $x\in]0,+\infty[$ $f(x) = 1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$f'(x) = -\dfrac{(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2} = -\dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \dfrac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

$f'(x) < 0$ *pour* $x > 0$

● Pour $x < 0$: $f(x) = 2-\sqrt{x^2-x}$

$f'(x) = 0-\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x^2-x}}$

$f'(x) > 0$ *pour* $x < 0$

T.V:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2-\sqrt{x^2-x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}_{\searrow 0} = 1$

● Les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses ont pour abscisses les solutions de $f(x) = 0$.

•pour $x < 0$:

$2-\sqrt{x^2-x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x} = 2$

$\Leftrightarrow x^2-x = 4 \Leftrightarrow x^2-x-4 = 0$

$\Delta = 25 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 5$

$x' = \dfrac{1+5}{2}$ ou $x'' = \dfrac{1-5}{2} = -2$

$x' = 3 > 0$ (à Rejeté) ou $\boxed{x'' = -2}$

• Pour $x > 0$:

$1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = -1$. Impossible

Donc $(C_f)\cap(xx') = \{A(-2,0)\}$

● a) $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = f(x)-x = 0$

Sur $]0,+\infty[$:

$g'(x) = f'(x)-1 < 0$ car $f'(x) < 0$

D'où g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ et $g(]0,+\infty[) =]-\infty,2[$.

(car $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = 1-\infty = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)-x = 2-0 = 2$)

Comme $0\in]-\infty,2[$ l'équation $g(x) = 0$

et par suite $f(x) = x$ admet dans $]0,+\infty[$

une unique solution α

b) $g(1,5) = f(1,5)-1,5 \simeq 0,05$

$g(1,6) = f(1,6)-1,6 \simeq -0,07$

$g(1,5)\times g(1,6) < 0 \Rightarrow 1,5 < \alpha < 1,6$

● */on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Leftrightarrow y = 1$

est une asymptote a C_f au voisinage de $+\infty$.

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-\sqrt{x^2-x}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\left(-\frac{2}{x}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}{x}$ ($\frac{2}{x}\searrow 0$, $\sqrt{1-\frac{1}{x}}\searrow 1$) $= 1$

Carnet-Aqra Blech-Carray.tn